
Ottimizzazione delle emissioni di titoli di debito pubblico

Massimiliano Adamo Anna Lisa Amadori

M. B.

Claudia La Chioma

Alessia Marigo

Benedetto Piccoli

Simone Sbaraglia Adamo Uboldi Davide Vergni

Istituto per le Applicazioni del Calcolo 'Mauro Picone' - CNR

Viale del Policlinico, 137 - 00161 Rome - Italy

<http://www.iac.rm.cnr.it/>

Gestione del debito pubblico

Collaborazione con il Ministero dell'Economia (iniziata alla fine del 2000)

Direzione II - Ufficio II “Analisi dei problemi inerenti alla gestione del debito pubblico interno ed al funzionamento dei mercati”.

- Individuazione di una politica “ottimale” per l'emissione di titoli di debito pubblico.
 - In genere viene affrontato il problema dell'allocazione tattica o strategica di capitale da parte di un investitore.
 - Nel caso del Ministero, si vuole determinare la politica di indebitamento più “conveniente”.

Gestione del debito pubblico

Per i paesi dell'Unione Europea esistono vincoli imposti dal patto di crescita e stabilità:

- Il deficit annuale deve essere inferiore al 3% del prodotto interno lordo.
- Il totale del debito pubblico deve essere inferiore al 60% del prodotto interno lordo.
- Il tasso di inflazione non deve superare dell'1.5% la media dei tre paesi dell'UE con il tasso più basso.
- I tassi di interesse a lunga scadenza non devono superare del 2% la media dei tre paesi con i tassi più bassi.

Gestione del debito pubblico

Una scelta “ingenua” dei titoli da emettere può avere effetti disastrosi sul debito pubblico.

- Ogni anno vengono emessi 150-200 miliardi di Euro (300-400000 miliardi di lire).
- Un “errore” nella politica di emissione che determini un debito aggiuntivo dello **0,5%** corrisponde a 1 miliardo di Euro (~ 2000 miliardi di lire).
- Affrontare un problema di questo tipo è particolarmente difficile:
 - necessità di considerare vincoli reali di natura eterogenea
 - esiste poca letteratura al riguardo.

Gestione del debito pubblico

Il Tesoro italiano emette **attualmente** 10 tipi di titoli:

- BOT (titoli senza cedola) a 3, 6, 12 mesi
- CTZ (titolo senza cedola) a 24 mesi
- CCT (cedola semestrale variabile) a 7 anni
- BTP (cedola semestrale) a 3, 5, 10, 15 e 30 anni

Tranne i BTP a 15 e 30 anni, gli altri titoli sono emessi almeno una volta al mese.

In totale (per un periodo di 5 anni) ci sono ~ 600 variabili da ottimizzare

Indichiamo con

$u_k(t)$: l'importo sottoscritto del titolo k al tempo t

$p_k(t)$: il prezzo del titolo k emesso al tempo t

$c_k(s; t)$: la cedola al tempo s del titolo k emesso al tempo t

m_k : maturità del titolo k

Flussi generati dal Portafoglio Titoli

L'insieme dei pagamenti (*cash-flow* al tempo s) per unità del titolo k emesso al tempo t

$$R_k(s; t) = \delta_t(s)p_k(t) - 100 \left[\delta_{t+m_k}(s) + \sum_{\ell=1}^{m_k/6} \delta_{t+6\ell}(s)c_k(\ell; t) \right]$$

Si noti che $R_k(s; t)$ è non nullo solo nell'intervallo temporale di esistenza del titolo $[t, t + m_k]$, essendo positivo solo al momento dell'emissione t , e negativo per i successivi ripagamenti nel resto dell'intervallo.

Il flusso di denaro

$$\text{Flusso} = (\text{Titoli emessi}) - (\text{Titoli e Cedole in scadenza})$$

è gestito attraverso il **Conto Disponibilità e Giacenza** presso la Banca d'Italia.

Flussi generati dal Portafoglio Titoli

Ad ogni istante il Flusso deve coprire l'Avanzo Primario (che può essere negativo) e soddisfare i vincoli istituzionali che riguardano il Conto Disponibilità.

- l'**Avanzo Primario** è la differenza tra le entrate nelle casse dello stato (*e.g.*, tasse) e le uscite fisse (*e.g.*, stipendi) e straordinarie (*e.g.*, investimenti per infrastrutture).

Non comprende il rifinanziamento dei titoli in scadenza

- Sul **Conto Disponibilità** esistono stretti vincoli istituzionali quali la disponibilità di almeno 15 miliardi di Euro alla fine di ogni mese.

Il Flusso è dato da:

$$\text{Flusso}(s) = \sum_{k \in K} \sum_{t=s-m_k}^s \frac{u_k(t)}{100} R_k(s; t)$$

Vincoli

La strategia di emissione dei titoli deve tenere conto di vincoli di varia natura:

- Vincolo **Patto di Stabilità** (Comunità Europea)
- Vincolo sull'**emissione netta** annuale e sul **Conto Disponibilità** (Istituzionale)
- Vincoli di **rifinanziamento** (Bilancio)
- Vincoli sulla **composizione del portafoglio** (Mercato)
- Altri vincoli imposti dalla Comunità Europea:
 - I tassi di interessi a lunga scadenza non devono superare del 2% la media dei tre paesi con i tassi più bassi.

Funzione Costo

Sono possibili diverse scelte. Ad esempio:

Spesa per Interessi di Competenza calcolata secondo il criterio SEC95.

È una misura dell'ammontare degli interessi relativi al debito contratto.

Relativamente ad un certo periodo temporale, $[t_1, t_2]$, il SEC95 si calcola sommando tutte le quote di cedole e di scarti di emissione che hanno un periodo di godimento sovrapponibile all'intervallo $[t_1, t_2]$. Per quote si intende il rapporto tra i giorni di vita della cedola (o del titolo) nel periodo in esame diviso i giorni complessivi di vita della cedola (o del titolo).

$$\text{SEC95}([t_1, t_2]) = \sum_{k \in K} \sum_{t=t_1-m_k}^{t_2} \left(\frac{u_k(t)}{100} (100 - p_k(t)) \frac{[t_1, t_2] \cap [t, t + m_k]}{[t, t + m_k]} + \sum_{\ell=1}^{m_k/6} \frac{u_k(t)}{100} c_k(t; \ell) \frac{[t_1, t_2] \cap [t + 6(\ell - 1), t + 6\ell]}{[t + 6(\ell - 1), t + 6\ell]} \right)$$

Rappresentazione lineare

Rifinanziamento:

$$\sum_{i \in I} \frac{u_i(t)}{100} p_i(t) = \sum_{i \in I_t} u_i(\hat{t}_i) + \sum_{j \in C_t} u_j(\tilde{t}_j) c_j(\tilde{t}_i) + b(t)$$

dove I_t è l'insieme dei titoli in scadenza e C_t è l'insieme dei titoli che pagano una cedola.

Patto di Stabilità:

$$\sum_{i \in I_{t > T}} u_i(\hat{t}_i) \leq \alpha \cdot \text{PIL}$$

SEC 95:

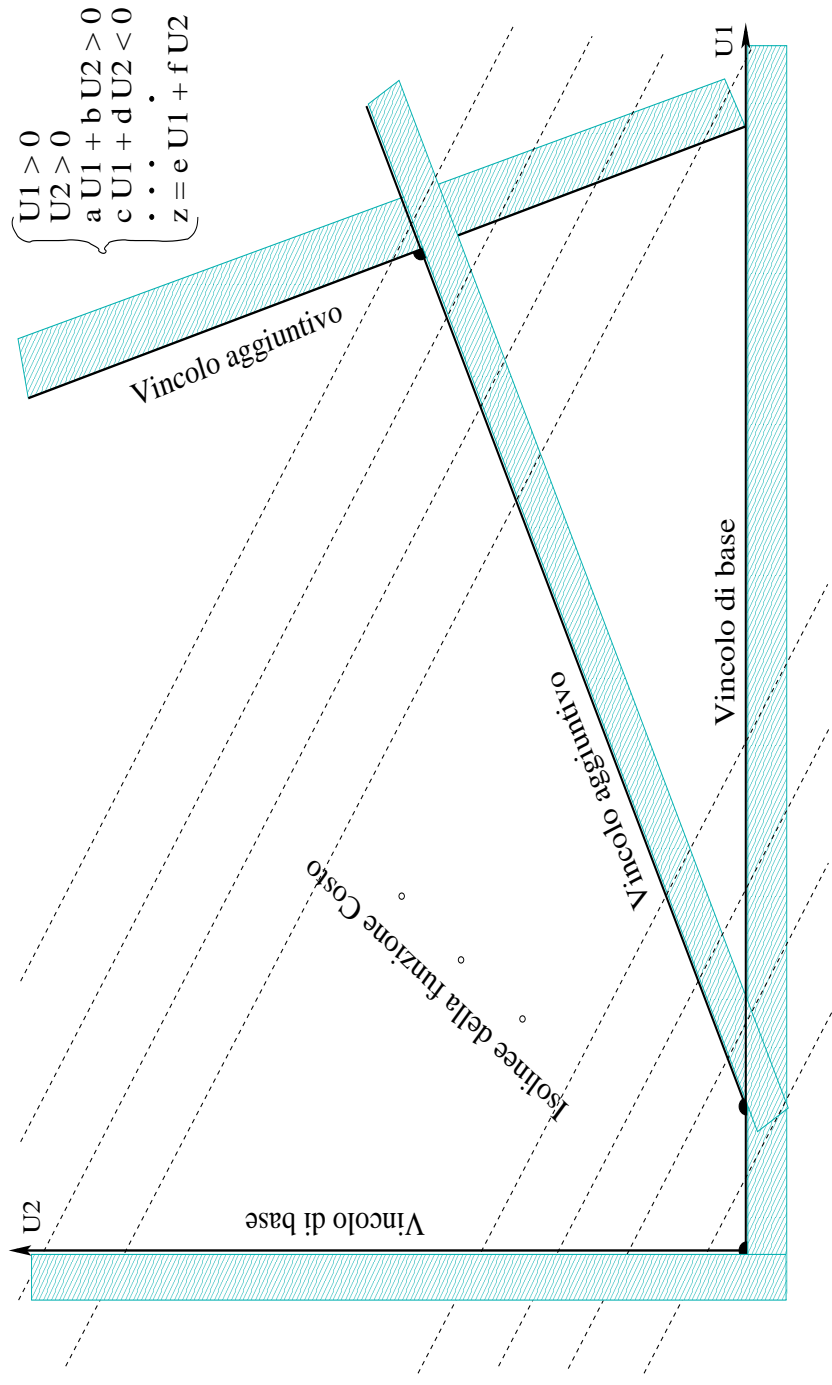
$$\sum_{i \in I} \left(\frac{u_i(t)(100 - p_i(t))}{100} \frac{\text{giorni-god-tit}}{\text{giorni-tot-tit}} + u_i(t) c_i(t) \frac{\text{giorni-god-ced}}{\text{giorni-tot-ced}} \right)$$

La programmazione lineare (PL)

- È possibile formulare il problema in modo lineare nelle variabili di controllo (le quantità emesse).
- I problemi lineari sono a bassa complessità computazionale (di solito polinomiale nella taglia dell'input).
- Esistono quindi algoritmi che risolvono problemi di PL in tempi molto rapidi: l'algoritmo del *simplex* è uno di questi.

L'insieme di tutte le scelte per $\{u_k(t)\}$ che soddisfano i vincoli è detto **simplex**. È uno spazio compatto e convesso. Essendo la funzione costo lineare i suoi estremi si trovano sul bordo del simplex. L'algoritmo del simplex permette di trovare quel punto dello spazio dei controlli $\{u_k(t)\}$ che, oltre a verificare tutti i vincoli, è anche il minimo della funzione costo.

Metodo del Simplexso



Componenti stocastiche del problema

Esistono due “sorgenti di indeterminazione”:

- Il fabbisogno (funzione del prodotto interno lordo e di altre variabili macroeconomiche).
- L’evoluzione dei tassi di interesse
 - La modellizzazione dei tassi di interesse si basa su equazioni differenziali stocastiche:

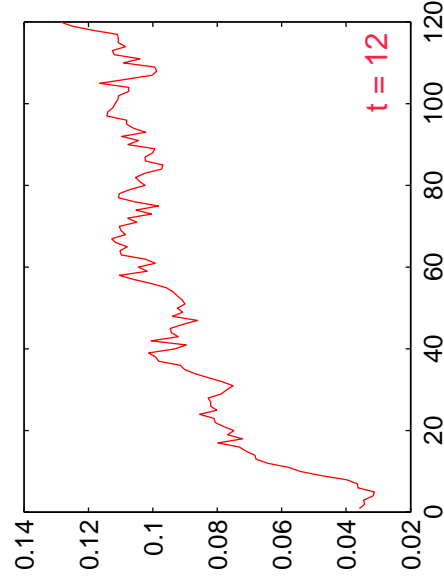
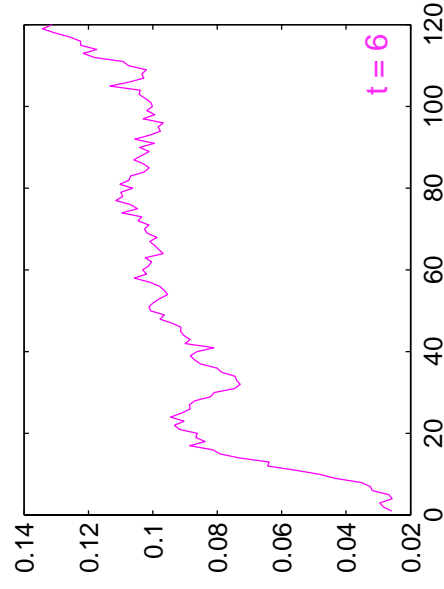
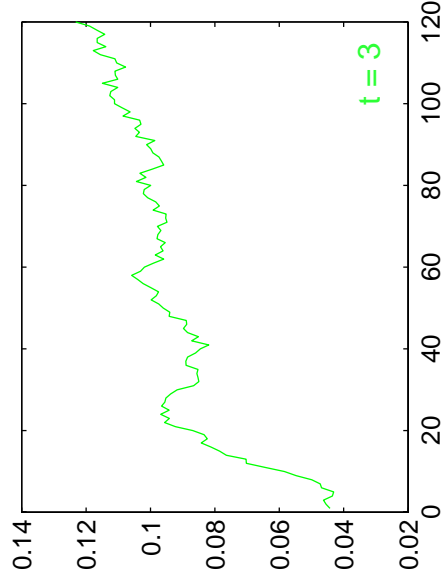
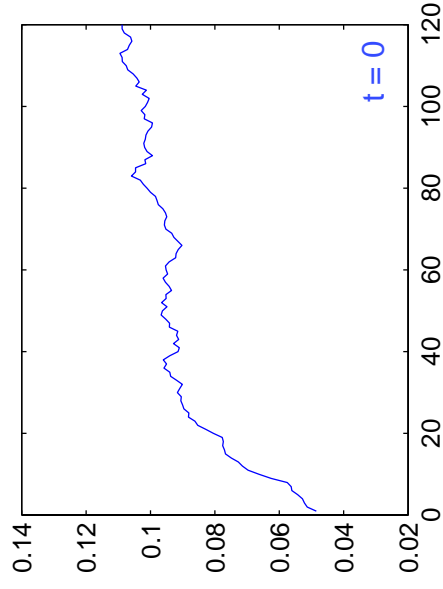
$$dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t, \quad (1)$$

dove W_t rappresenta un processo di Wiener.

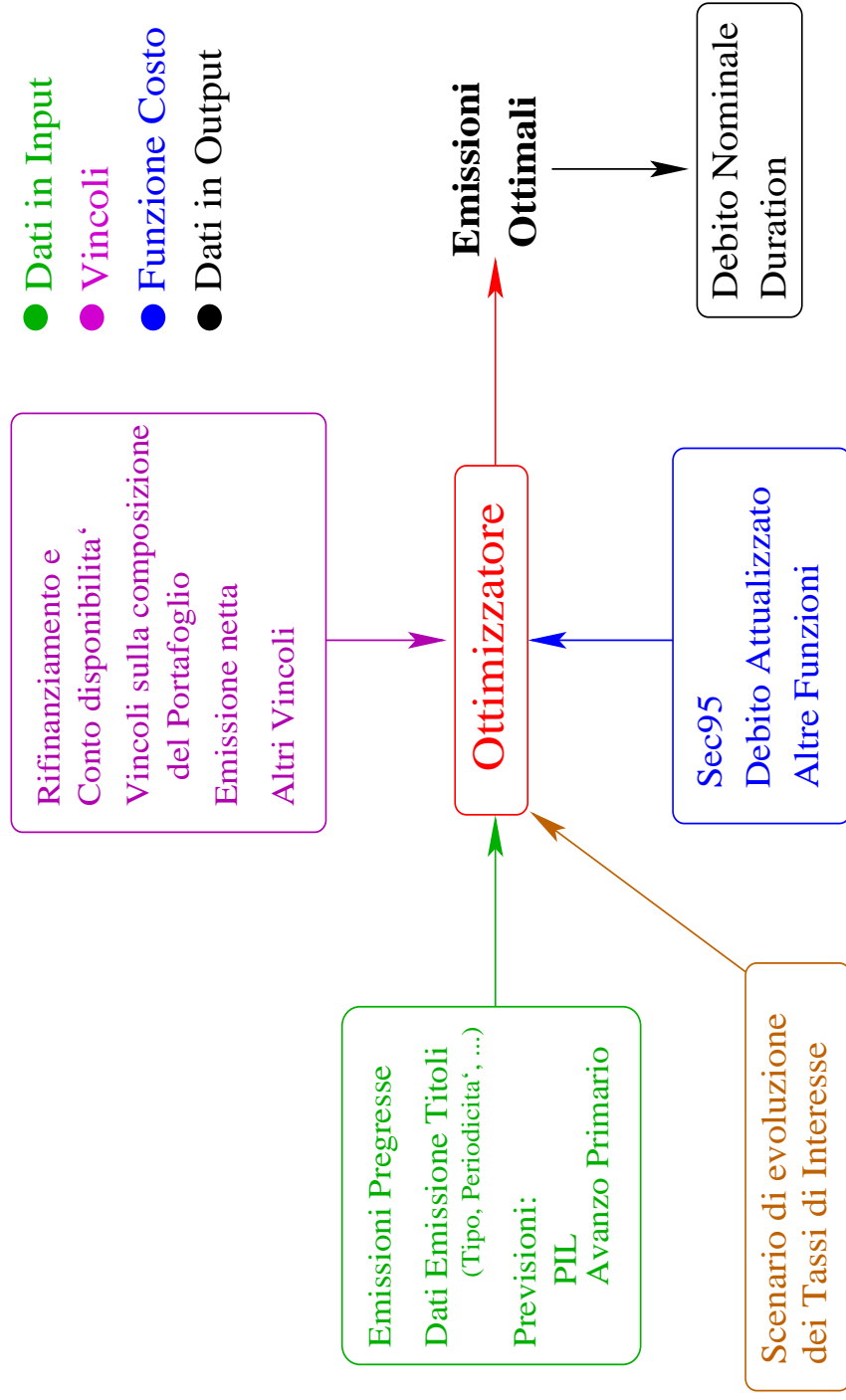
Un *modello* per il tasso di interesse (a breve) corrisponde ad una specifica forma funzionale di $\mu(r, t)$ e di $\sigma(r, t)$.

- La struttura a termine rappresenta la relazione tra il tasso di interesse e la *maturità*.

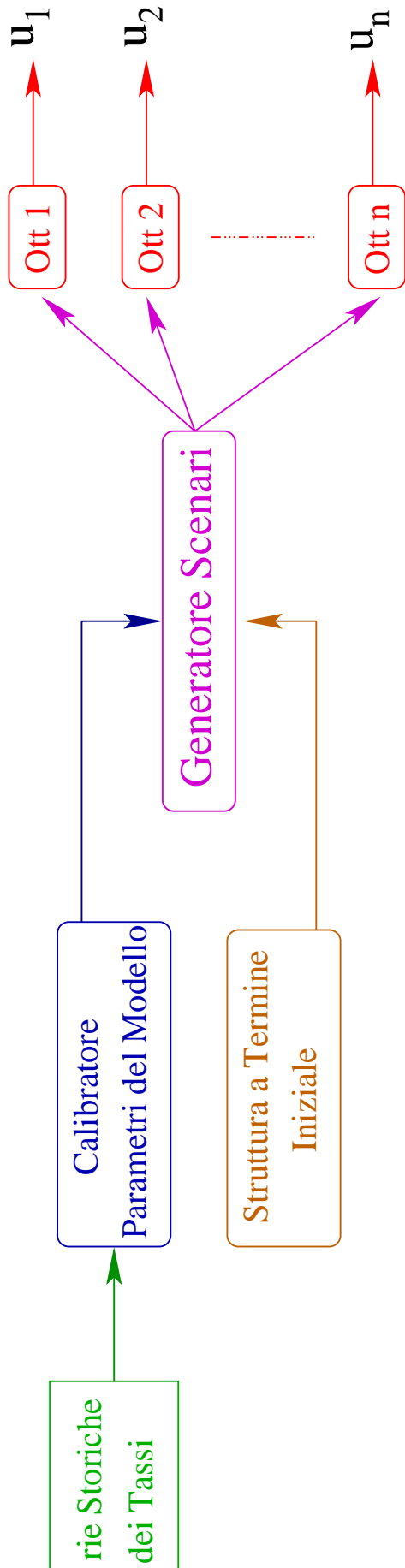
Scenario di Evoluzione della Struttura a Termine



Struttura dell'Ottimizzatore



Ottimizzazione Multiscenario



Scelta del Portafoglio

Il problema cruciale è decidere come scegliere il portafoglio da usare per le emissioni a partire da tutti i portafogli “ottimi”. Chiamiamo $P_{\{S\}}$ il portafoglio selezionato. Come osservabile della bontà della nostra scelta usiamo la differenza tra il minimo assoluto del SEC95 e quello realizzato con $P_{\{S\}}$ rispetto ad un certo scenario S_i

$$\text{ERR}(S_i) = \frac{\text{SEC95}(S_i; P_{\{S\}}) - \text{SEC95}(S_i; P_{\min}(S_i))}{\text{SEC95}(S_i; P_{\min}(S_i))}$$

Una prima scelta possibile è prendere come $P_{\{S\}}$ un portafoglio che minimizzi un dato scenario S_k . Visto che questo portafoglio, usato su uno scenario diverso, in generale, non soddisferà i vincoli, dovrà essere modificato in modo che ad ogni emissione vengano verificati tutti i vincoli imposti.

Portafoglio Iterato

Alla scelta *fissa* contrapponiamo la scelta *iterata*.

ω_i : struttura a termine al tempo t_i ,

$\tilde{\omega}_t(i)$: previsione al tempo t_i della struttura a termine del tempo t ($t > t_i$),

u_i : composizione del portafoglio di titoli effettivamente emessi al tempo t_i .

$\tilde{u}_t(i)$: composizione del portafoglio al tempo t calcolata al tempo t_i ($t \geq t_i$).

Ad ogni tempo i supponiamo nota la struttura a termine ω_i .

1. A partire da questa costruiamo l'intero scenario di evoluzione dei tassi fino al tempo T (orizzonte temporale della simulazione), $\tilde{\omega}_t(i)$ con $i < t \leq T$.
2. A partire da questo scenario dei tassi si trova il portafoglio che minimizza il SEC95 nel periodo $t_i \leq t \leq T$: $\tilde{u}_t(i)$.

3. Di tutte le emissioni si usa effettivamente solo quella relativa al tempo attuale, e si pone $u_i = \tilde{u}_i(i)$.

I test numerici dimostrano come la strategia iterata permetta di ridurre sensibilmente la distanza dal valore ottimo anche in caso di una politica di emissione iniziale totalmente errata.

Stato del progetto

- Il prototipo software è stato completamente sviluppato.
 - per “compatibilità” con il Ministero l’ambiente è Windows.
- Tutte le funzioni di calcolo sono state validate su dati reali.
 - I risultati sono coerenti con i vincoli imposti.
- La sperimentazione è in corso presso il Ministero.

Problemi Aperti

- Selezione del modello per l'evoluzione dei tassi
 - praticamente tutti i modelli attualmente in uso sono di tipo diffusivo
 - non viene tenuto conto dei “salti” dovuti alle scelte di politica monetaria (responsabilità della Banca Centrale Europea).
- Test su finestre temporali più ampie
- Utilizzo di tecniche tipiche del controllo ingegneristico
- Inclusione degli elementi macroeconomici.